Exercice 1. (a) Supposons que $W_1 \subset W_2$ et considérons un vecteur y tel que $y \in W_2^\perp$, alors $\langle x, y\rangle = 0$ pour tout $x \in W_2$. En particulier $\langle x, y\rangle = 0$ pour tout $x \in W_1$ car par hypothèse on a $W_1 \subset W_2$. Par conséquent $y \in W_1^\perp$. On a donc montré que $W_2^\perp \subset W_1^\perp$.

(b) On a vu au cours (Théorème 11.2.3) que $V = W_1 \oplus W_1^\perp$; cela implique en particulier que $\dim(W_1^\perp) = n - \dim(W_1)$. Si $x \in W_1$, alors $\langle x, y\rangle = 0$ pour tout $y \in W_1^\perp$ par définition de $W_1^\perp$. Par conséquent $W_1 \subset (W_1^\perp)^\perp$, or ces deux sous-espaces vectoriels ont la même dimension et ils sont donc égaux.

(c) On montre les deux inclusions. Soit y un élément de $(W_1 + W_2)^\perp$. Alors $\langle x, y\rangle = 0$ pour tout $x \in W_1 + W_2$. En particulier $\langle x, y\rangle = 0$ pour tout $x \in W_1$, donc $y \in W_1^\perp$ et $\langle x, y\rangle = 0$ pour tout $x \in W_2$, donc $y \in W_2^\perp$. Cela montre l'inclusion $(W_1 + W_2)^\perp \subset W_1^\perp \cap W_2^\perp$.

Inversément, si $y \in W_1^\perp \cap W_2^\perp$, alors pour tout $x \in W_1 + W_2$ on a $\langle x, y\rangle = 0$ car on peut écrire $x = x_1 + x_2$ avec $x_1 \in W_1$ wt $x_2 \in W_2$, ce qui implique que

$$\langle x, y\rangle = \langle x_1 + x_2, y\rangle = \langle x_1, y\rangle + \langle x_2, y\rangle = 0 + 0 = 0$$

car le produit scalaire est bilinéaire. Par conséquent $y \in (W_1 + W_2)^\perp$ et on a prouvé l'inclusion $W_1^\perp \cap W_2^\perp \subset (W_1 + W_2)^\perp$.

(d) Le dernier point est une conséquence de (b) et (c). Pour le voir, on note $U_1 = W_1^\perp$ et $U_2 = W_2^\perp$ et on applique les points (b) et (c) pour obtenir

$$W_1^\perp + W_1^\perp = U_1 + U_2 = ((U_1 + U_2)^\perp)^\perp = (U_1^\perp \cap U_2^\perp)^\perp = (W_1 \cap W_2)^\perp.$$

Exercice 2. (a) Un calcul direct donne $R_\theta^t R_\theta = \mathrm{I}_2$ et $S_\varphi^t S_\varphi = \mathrm{I}_2$.

(b) On a $\det(R_\theta) = +1$ donc $R_\theta \in \mathrm{SO}(2)$ et $\det S_\varphi = -1$ donc $S_\varphi \notin \mathrm{SO}(2)$.

(c) La matrice S_φ est symétrique, donc diagonalisable comme matrice réelle par le théorème spectral.

(On peut aussi le voir à partir du déterminant, qui est le produit des valeurs propres. Les valeurs propres ne peuvent pas être complexes conjuguées car $\det(S_\varphi) = -1$. Donc les valeurs propres de S_φ sont réelles et de signe opposée, en particulier elles sont distinctes et donc S_φ est diagonalisable).

(d) On a $S_\varphi^2 = \mathrm{I}_2$. Donc le polynôme minimal est $\mu_{S_\varphi}(t) = t^2 - 1 = (t-1)(t+1)$. Il est scindé à racines simples et donc S_φ est diagonalisable sur le corps des réels. Notons pour la suite que les valeurs propres de S_φ sont ± 1.

(e) Les valeurs propres complexes de R_θ sont $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$ et $e^{-i\theta} = \cos(\theta) - i\sin(\theta)$; donc R_θ n'est pas diagonalisable comme matrice réelle si $\theta \notin \{0, \pi\}$.

Si $\theta = 0$ ou $\theta = \pi$ (modulo 2π) alors $R_\theta = \pm\mathrm{I}_2$ est trivialement diagonalisable (en fait c'est déjà une matrice diagonale).

(f) R_θ est diagonalisable comme matrice de $M_2(\mathbb{C})$ pour tout θ. On l'a vu au point (e) dans le cas où $\theta \in \{0, \pi\}$, et si $\theta \notin \{0, \pi\}$, alors R_θ possède deux valeurs propres complexes distinctes et est donc diagonalisable comme matrice de $M_2(\mathbb{C})$.

(g) Soit $v = (x, y)$ un vecteur non nul de $\mathbb{R}^2$. On calcule alors que l'angle entre v et $R_\theta(v)$ est

$$\cos(\alpha) = \frac{\langle v, R_\theta(v)\rangle}{\|v\|\|R_\theta(v)\|} = \frac{\langle v, R_\theta(v)\rangle}{\|v\|^2} = \cos(\theta).$$

Donc $\alpha = \pm\theta$. En argumentant sur l'orientation on vérifie que $\alpha = \theta$.

(h) On a

$$\begin{aligned} R(\theta)R(\varphi) &= \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\theta)\cos(\varphi) - \sin(\theta)\sin(\varphi) & -\cos(\theta)\sin(\varphi) - \sin(\theta)\cos(\varphi) \\ \sin(\theta)\cos(\varphi) + \cos(\theta)\sin(\varphi) & \cos(\theta)\cos(\varphi) - \sin(\theta)\sin(\varphi) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

D'autre part il est clair que $R(\theta)R(\varphi)$, qui représente la composition d'une rotation d'angle θ et φ est la rotation d'angle $\theta + \varphi$, on a donc

$$R(\theta)R(\varphi) = R(\theta + \varphi) = \begin{pmatrix} \cos(\theta + \varphi) & -\sin(\theta + \varphi) \\ \sin(\theta + \varphi) & \cos(\theta + \varphi) \end{pmatrix},$$

ce qui donne une preuve des relations :

$$\cos(\theta + \varphi) = \cos(\theta)\cos(\varphi) - \sin(\theta)\sin(\varphi) \quad \text{et} \quad \sin(\theta + \varphi) = \sin(\theta)\cos(\varphi) + \cos(\theta)\sin(\varphi).$$

(i) En utilisant les relations $\cos(2\varphi) = \cos(\varphi)^2 - \sin(\varphi)^2$ et $\sin(2\varphi) = 2\cos(\varphi)\sin(\varphi)$, on calcule que

$$S_\varphi \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(2\varphi)\cos(\varphi) + \sin(2\varphi)\sin(\varphi) \\ \sin(2\varphi)\cos(\varphi) - \cos(2\varphi)\sin(\varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix}$$

Ainsi $\begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de valeur propre 1 pour S_φ. Puisque S_φ est symétrique, on doit avoir un vecteur propre orthogonal ce vecteur (pour la valeur propre -1) et on vérifie en effet que

$$S_\varphi \begin{pmatrix} -\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} -\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

On a donc trouvé une base orthonormée de $\mathbb{R}^2$ formée de vecteurs propres de S_φ et on a donc la diagonalisation orthogonale suivante :

$$\begin{pmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & -\cos(\varphi) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(2\varphi) & \sin(2\varphi) \\ \sin(2\varphi) & -\cos(2\varphi) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & -\cos(\varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Exercice 3. (a) Une matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ est orthogonalement diagonalisable s'il existe une matrice orthogonale $P \in O(n)$ (i.e. $P^tP = I_n$) telle que

$$D = P^{-1}AP = P^tAP \text{ est une matrice diagonale.}$$

Observer que du fait que $P^{-1} = P^t$ (car $P \in O(n)$), la matrice diagonale D est à la fois semblable et congruente à A.

Concrètement, pour diagonaliser orthogonalement une matrice réelle, il faut trouver une base propre qui est orthonormée. La matrice modale (de changement de base) P est alors une matrice orthogonale.

(b) Si A est orthogonalement diagonalisable, alors $A = PDP^t$ avec $P \in O(n)$ et $D^t = D$. On a donc :

$$A^t = \left(PDP^t\right)^t = \left(P^t\right)^t D^t P^t = PDP^t = A.$$

(c) Oui, la réciproque est vraie par le théorème spectral. Donc une matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ est orthogonalement diagonalisable si et seulement si elle est symétrique.

(d) Le polynôme caractéristique de la matrice A donnée en (b) est $\chi_A(t) = (t-1)(t-2)(t+2)$ et $\sigma_A = \{1, 2, -2\}$. Il y a donc trois espaces propres de dimension 1 et on sait que ces espaces propres sont deux-à-deux orthogonaux (car A est symétrique).

Donc toute base propre de A est une base orthogonale de $\mathbb{R}^3$, que l'on peut rendre orthonormée simplement en divisant chaque vecteur de cette base par sa norme.

On trouve une base propre de A en résolvant $AX = \lambda X$ pour $\lambda \in \{1, 2, -2\}$ (par exemple en utilisant la méthode de Gauss-Jordan). Une telle base propre est

$$X_1 = (\sqrt{2}, 1, 0), \quad X_2 = (-1, \sqrt{2}, 1), \quad X_3 = (1, -\sqrt{2}, 3).$$

On vérifie d'ailleurs facilement que ces vecteurs sont deux-à-deux orthogonaux. En normalisant ces vecteurs (i.e. en les divisant par leur norme), on obtient la base spectrale (base propre orthonormée) voulue :

$$U_1 = \left(\frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, 0\right), \quad U_2 = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}\right), \quad U_3 = \left(\frac{\sqrt{3}}{6}, -\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

On vérifie alors que $P \in O(3)$, i.e. $P^t P = I_3$. Ceci implique que $P^{-1} = P^t$ et on vérifie aussi que

$$P^{-1}AP = P^tAP = P^t \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & \sqrt{2} \\ -1 & \sqrt{2} & -1 \end{pmatrix} \cdot P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Exercice 4. (a) Supposons que $Q(v) = \beta(v,v)$ mais que β n'est pas symétrique. Posons alors $\alpha(u,v) = \frac{1}{2}(\beta(v,w) + \beta(w,v))$, alors α est clairement symétrique et

$$\alpha(v,v) = \beta(v,v) = Q(v).$$

(b) On suppose maintenant que $Q(v) = \beta(v,v)$ où β est bilinéaire et symétrique. En utilisant la bilinéarité, on vérifie alors que pour tous $v,w \in V$ on a

$$\frac{1}{4}(Q(v+w) - Q(v-w)) = \frac{1}{4}(\beta(v+w,v+w) - \beta(v-w,v-w)) = \beta(v,w),$$

donc β est déterminé par Q.

(c) La bilinéarité de β entraîne que

$$Q(\lambda v) = \beta(\lambda v, \lambda v) = \lambda^2 \beta(v,v) = \lambda^2 Q(v).$$

(d) La réciproque est fausse, en général la condition $Q(\lambda v) = \lambda^2 Q(v)$ n'entraîne pas que Q est une forme quadratique. Voici un exemple, considérons la fonction $Q_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $Q_1(x_1,x_2) = (|x_1| + |x_2|)^2$. Alors Q_1 vérifie $Q_1(\lambda x) = \lambda^2 Q_1(x)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et tout $x \in \mathbb{R}^2$, mais ça n'est pas une forme quadratique. Pour le voir on peut vérifier que la fonction

$$\varphi(x,y) = \frac{1}{4}\left(Q_1(x+y) - Q_1(x-y)\right)$$

n'est pas une forme bilinéaire. Par exemple on a

$$\varphi(1,0;1,1) = 2, \quad \varphi(1,0;0,1) = 0, \quad \varphi(1,0;1,0) = 1;$$

donc

$$\varphi(1,0;1,1) \neq \varphi(1,0;0,1) + \varphi(1,0;1,0)$$

Plus généralement, la fonction $Q_p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie pour $1 \leq p < \infty$ par

$$Q_p(x) = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{2/p}$$

vérifie $Q_p(\lambda x) = \lambda^2 Q(x)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et tout $x \in \mathbb{R}^n$, mais c'est une forme quadratique (i.e. cette fonction provient d'une forme bilinéaire) si et seulement si $p = 2$.

Exercice 5. Nous procédons par complétion des carrés. Pour Q_1 on a presque immédiatement

$$Q_1(x,y) = 4(x+y)^2 - 4x^2.$$

Pour Q_2 il faut plusieurs étapes. On considère d'abord la partie de la forme quadratique Q_2 qui contient x, on a

$$4x^2 - 4xy + 12xz = (2x - y + 3z)^2 - (y^2 - 6yz + 9z^2).$$

Donc

$$Q_2(x,y,z) = \big((2x-y+3z)^2 - (y^2 - 6yz + 9z^2)\big) - y^2 - 10yz + 7z^2 = (2x-y+3z)^2 - 2y^2 - 4yz - 2z^2.$$

Maintenant il faut écrire $(2y^2 + 4yz + 2z^2)$ comme somme de carrés (l'intérêt est qu'on a une variable de moins : cette expression ne dépend plus de x), or on a clairement que $(2y^2 + 4yz + 2z^2) = 2(y+z)^2$. On a donc finalement

$$Q_2(x,y,z) = 4x^2 - 4xy + 12xz - y^2 - 10yz + 7z^2 = (2x - y + 3z)^2 - 2(y+z)^2.$$

Exercice 6. L'affirmation est que si $Q(v_j) = 0$ pour tous les vecteurs d'une base $\{v_1, \ldots, v_n\}$ de V, alors Q est identiquement nulle. Cette affirmation est fausse !

Avant de donner un contre-exemple, il est utile de se souvenir que si une application *linéaire* est nulle sur tous les vecteurs d'une base, alors cette application est identiquement nulle, c'est-à-dire nulle sur tous les vecteurs de l'espace vectoriel . Mais il n'y a aucune raison que cette propriété soit vraie pour les *formes quadratiques*, car ce ne sont pas des applications bilinéaires. En particulier, si $Q(v) = Q(w) = 0$, il n'est pas e priori vrai que $Q(v+w) = 0$.

Voici un contre-exemple. Considérons la forme quadratique sur $\mathbb{R}^2$ définie par

$$Q(x) = x_1^2 - x_2^2 \quad \Leftrightarrow \quad g(x,y) = x_1y_1 - x_2y_2.$$

Les vecteurs $\mathbf{u}_1 = (1,1) = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$ et $\mathbf{u}_2 = (1,-1) = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2$ forment une base isotrope (on vérifie que $Q(\mathbf{u}_1) = Q(\mathbf{u}_2) = 0$ mais Q n'est pas identiquement nulle.

Pour comparer, on peut en revanche observer que si une forme *bilinéaire* $\beta : V \times V \to K$ vérifie $\beta(v_i, v_j) = 0$ pour tous les vecteurs v_i, v_j d'une base de V, alors β est identiquement nulle, i.e. $\beta(x,y) = 0$ pour tous $x, y \in V$.

Exercice 7. La troisième fonction n'est pas une forme quadratique, les autres le sont.

∘ Pour la première, on a $Q(x_1,x_2,x_3) = |x_1-x_2+x_3|^2 = (x_1-x_2+x_3)^2$ (il ne faut pas se laisser abuser par la présence des valeurs absolues, qui ici ne sont pas nécessaires). C'est une forme quadratique sur $\mathbb{R}^3$ et la forme bilinéaire symétrique associée $\beta : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ est

$$\beta(x,y) = (x_1 - x_2 + x_3)(y_1 - y_2 + y_3).$$

∘ La deuxième fonctionnelle est aussi une une forme quadratique sur $C^2(\mathbb{R})$ et la forme bilinéaire symétrique associée $\beta : C^2(\mathbb{R}) \times C^2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ est facile à deviner :

$$\beta(f,g) = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (f(t)g''(t) + f''(t)g(t))dt.$$

∘ La quatrième fonctionnelle s'écrit

$$\det \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} = x_{11}x_{22} - x_{21}x_{12}.$$

C'est une forme quadratique sur $M_2(\mathbb{R})$ et la forme bilinéaire symétrique associées $\beta : M_2(\mathbb{R}) \times M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ est

$$\beta(X,Y) = \beta\left(\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2}\left(x_{11}y_{22} - x_{21}y_{12} - y_{11}x_{22} + y_{21}x_{12}\right).$$

∘ La troisième fonction $Q(x_1,x_2,x_3) = (|x_1-x_2|+|x_3|)^2$ vérifie $Q(\lambda x) = \lambda^2 Q(x)$, mais elle n'est pas une forme quadratique. Pour le voir on peut écrire la formule de polarisation et voir qu'elle ne donne pas une forme bilinéaire, mais le calcul est assez lourd. Une autre méthode est de vérifier que Q n'est pas de classe C^2. En effet, on a par exemple

$$Q(x_1,0,0) = (|x_1| + 1)^2 = 1 + x^2 + 2|x_1|,$$

qui n'est pas une fonction différentiable de la variable x_1.

Remarque : si on développe Q on trouve

$$Q(x_1,x_2,x_3) = (|x_1 - x_2| + |x_3|)^2 = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 + x_3 + 2|x_1 - x_2||x_3|,$$

contrairement à la première fonction de l'exercice, les valeurs absolues « persistent » lors du développement, ce qui explique la non différentiabilité de Q.

Exercice 8. (a) Démontrer que pour toute matrice $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, il existe une matrice orthogonale $P \in O(n)$ et $\mu_1, \ldots, \mu_n \geq 0$ tels que

$$P^t A^t A P = \begin{pmatrix} \mu_1^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mu_n^2 \end{pmatrix}.$$

Les nombres $\mu_1, \ldots, \mu_n$ s'appellent les *valeurs singulières de la matrice A.*

(b) Calculer les valeurs singulières de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = (1\ 0\ 2)$.

Exercice 9. (a) Notons $S = A^t A$, alors S est symétrique car $S^t = A^t(A^t)^t = A^t A = S$. Donc par le théorème spectral S est orthogonalement diagonalisable. Nous devons démontrer que les valeurs propres de S sont positives. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre de S et $v \in \mathbb{R}^n$ un vecteur propre associé. On a alors

$$\langle v, \lambda v\rangle = \langle v, Sv\rangle = \langle v, A^t A v\rangle = \langle Av, Av\rangle = \|Av\|^2 \geq 0.$$

On voit donc que

$$\lambda = \mu^2, \quad \text{avec} \ \ \mu = \frac{\|Av\|}{\|v\|}.$$

(b) Les valeurs singulières des matrices A et B sont les racines carrées des valeurs propres des matrices

$$A^t A = \begin{pmatrix} 11 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B^t B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Les valeurs singulières de A sont donc $\sqrt{11}, \sqrt{6}$ et les valeurs singulières de B sont $\sqrt{5}, 0, 0$.
